Chapitre I : Calcul des polygones fermés.

1. Définition du gisement

Le gisement d'une direction AB est l'angle horizontal mesuré positivement dans le sens horaire entre l'axe des ordonnées du système de projection utilisé et cette direction AB (figure 1). On le note $\boldsymbol{G}_{\mathbf{AB}}$ (ou aussi $\boldsymbol{V}_{\mathbf{AB}}$).

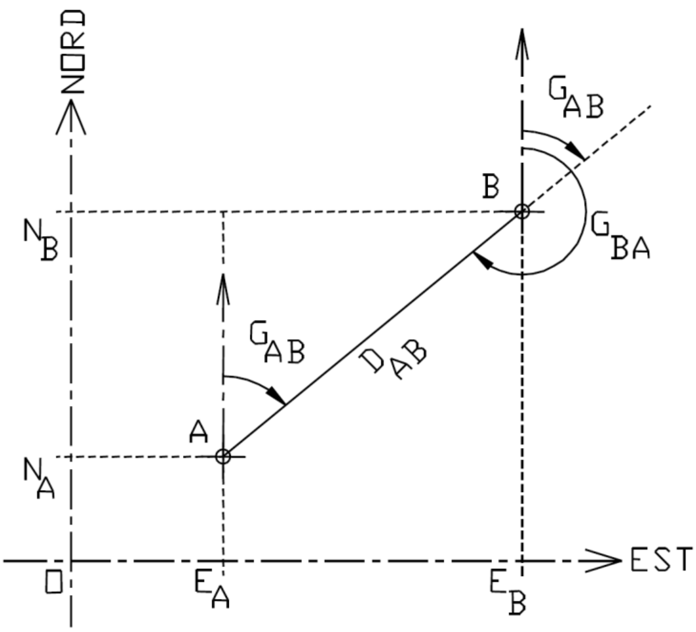

Figure 1 – Gisement de la direction AB.

Par exemple (figure 1) : *G*AB est l'angle entre le Nord (ordonnées) et la direction AB.

La relation qui lie *G*AB et *G*BA est:

$$G_{BA} = G_{AB} + 200$$

2. Calcul d'un gisement à partir des coordonnées cartésiennes

Considérons les coordonnées de deux points A(E_A, N_A) et B(E_B, N_B) (figure 1).

La relation suivante permet de calculer G_{AB}:

$$tgG_{AB} = \frac{x}{y} = \frac{E_B - E_A}{N_B - N_A}$$

La distance D_{AB} se calcul comme suit:

$$D_{AB} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(E_B - E_A)^2 + (N_B - N_A)^2}$$

Application

Calculez le gisement de la direction AB suivante:

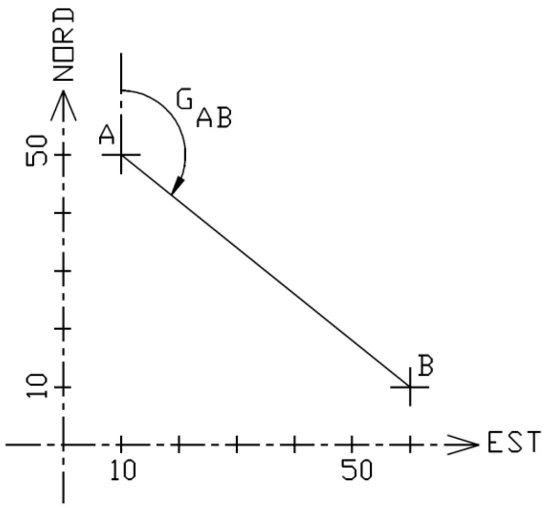

Figure 2 – Calcul du gisement.

Solution

A(10 ; 50) et B (60 ; 10)

$$x = \Delta E = E_B - E_A = +50$$
$$y = \Delta N = N_B - N_A = -40$$

$$G_{AB} = tg^{-1}\left(-\frac{50}{40}\right) = -57{,}045 gon$$

En observant le schéma des points **A** et **B** dans la figure 2, on s'aperçoit de l'incohérence de ce résultat. L'angle donné n'est visiblement pas égal à –57,045 gon.

En fait, la calculatrice donne la valeur de l'angle auxiliaire ***g*** (figure 3). Pour obtenir *G*AB , il faut donc tenir compte de la position du point B par rapport au point A ; on parle de quadrants:

- Quadrant 1 : B est à l'est et au nord de A ($\Delta E > 0$ et $\Delta N > 0$).

$$\boldsymbol{G_{AB} = g}$$

- Quadrant 2 : B est à l'est et au sud de A ($\Delta E > 0$ et $\Delta N < 0$).

$$\boldsymbol{G_{AB} = 200 + g} \text{ (avec } g < 0\text{)}$$

- Quadrant 3 : B est à l'ouest et au sud de A ($\Delta E < 0$ et $\Delta N < 0$).

$$\boldsymbol{G_{AB} = 200 + g} \text{ (avec } g > 0\text{)}$$

- Quadrant 4 : B à l'ouest et au nord de A ($\Delta E < 0$ et $\Delta N > 0$).

$$\boldsymbol{G_{AB} = 400 + g} \text{ (avec } g < 0\text{)}$$

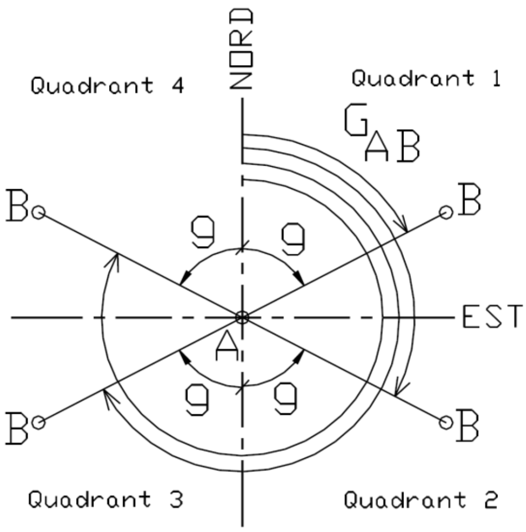

Figure 3 – Les différents quadrants.

3. Calcul des polygones fermés

Un polygone fermé vérifie les équations suivantes:

La somme algébrique des composantes horizontales = 0

La somme algébrique des composantes verticales = 0

A partir de ces deux équations, on peut déterminer deux inconnues du polygone:

- la longueur d'un seul coté;

- la longueur d'un coté et son gisement;

- la longueur de deux cotés différents;

- le gisement d'un coté;

- la longueur d'un coté et le gisement d'un autre;

- le gisement de deux cotés différents.

Généralement, les visées manquantes sont dues aux obstacles que l'on peut rencontrer lors de la mesure d'un angle ou d'un coté.

3.1. Recherche de la longueur de l'un des cotés du polygone

x = composante horizontale du coté inconnu

y = composante verticale du coté inconnu

d'où:

La somme algébrique des composantes horizontales connues = $-x$

La somme algébrique des composantes verticales connues = $-y$

Alors la longueur recherchée (noté l ou D) sera: $D_{AB} = \sqrt{x^2 + y^2}$

Dans ce cas on peut vérifier le gisement de ce coté par: $tgG = \frac{x}{y}$

3.2. Rechercher d'un angle ou du gisement de l'un des cotés

- Si l'inconnu est l'un des angles du polygone, on compte la somme des angles visées dont la somme totale des angles intérieurs d'un polygone fermé = 200 x (n – 2) [gon]

avec: $\boldsymbol{n}$ = le nombre des cotés du polygone.

Donc:

L'angle cherché α = la différence entre les deux sommes des angles intérieurs théoriques et pratiques.

- Si l'inconnu est l'un des gisements du polygone, on calcule les composantes horizontales et verticales de tous les cotés sauf celle du coté dont son gisement est inconnu.

On aura par exemple:

La somme algébrique des composantes horizontales connues = $-x$

Et $\boldsymbol{x}$ sera la composante horizontale du coté dont son gisement est inconnu

La somme algébrique des composantes verticales connues = -*y*

Et ***y*** sera la composante verticale du coté dont son gisement est inconnu

Alors, le gisement inconnu se détermine par:

$$tgG = \frac{x}{y}$$

Dans ce cas on peut vérifier la longueur de ce coté par: $\sqrt{x^2 + y^2}$, puis comparer cette valeur avec la valeur mesurée.

3.3. Recherche de la longueur d'un coté et de son gisement

En déterminant les composantes des cotés du polygone, on peut déterminer les composantes du coté inconnu et son gisement.

Par exemple:

On suppose que les composantes sont ***x*** et ***y***.

La longueur du coté sera: $D_{AB} = \sqrt{x^2 + y^2}$ (voir le premier cas)

Et son gisement est calculé à partir de: $tgG = \frac{x}{y}$ (voir le deuxième cas)

3.4. Recherche de la longueur d'un coté et le gisement d'un autre

On suppose que la longueur inconnue d'un coté = D_1, et son gisement connu = G_1. Ainsi que le gisement inconnu de l'autre coté = G_2, et sa longueur connue = D_2.

Donc les inconnus sont: D_1 et G_2.

La somme algébrique des composantes horizontales connues = - *x*

La somme algébrique des composantes verticales connues = -*y*

$$\begin{cases} D_1 \sin G_1 + D_2 \sin G_2 = x \text{.....................(1)} \\ D_1 \cos G_1 + D_2 \cos G_2 = y \text{.....................(2)} \end{cases}$$

On multiplie la première équation par (cos G_1) et la deuxième par (sin G_1):

$$\begin{cases} D_1 \sin G_1 . \cos G_1 + D_2 \sin G_2 . \cos G_1 = x . \cos G_1 \text{.....................(3)} \\ D_1 \cos G_1 . \sin G_1 + D_2 \cos G_2 . \sin G_1 = y . \sin G_1 \text{.....................(4)} \end{cases}$$

(4) – (3) nous donne:

$D_2 \cos G_2 . \sin G_1 - D_2 \sin G_2 . \cos G_1 = y . \sin G_1 - x . \cos G_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$

Comme D2, G1, x et y sont des valeurs connues, on peut écrire l'équation (5) comme suit:

$P_1 \cos G_2 - P_2 \sin G_2 = Q \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$

où: $P_1 = D_2 \sin G_1$, $P_2 = D_2 \cos G_1$, $Q = y \sin G_1 - x \cos G_1$: des valeurs numériques connues.

L'équation (6) s'écrit:

$P_1 \cos G_2 = P_2 \sin G_2 + Q$

En élevant les deux termes de cette équation au carré, on aura:

$P_1^2 . \cos^2 G_2 = P_2 . \sin^2 G_2 + 2 P_2 . Q . \sin G_2 + Q^2$

$\Leftrightarrow P_1^2 (1 - \sin^2 G_2) = P_2^2 . \sin^2 G_2 + 2 P_2 . Q . \sin G_2 + Q^2$

$\Leftrightarrow (P_1^2 + P_2^2) \sin^2 G_2 + 2 P_2 . Q . \sin G_2 + Q^2 - P_1^2 = 0$

en posant: $A = P_1^2 + P_2^2$, $B = 2 P_2 . Q$, $C = Q^2 - P_1^2$

On aura:

$$A \sin^2 G_2 + B \sin G_2 + C = 0$$

Alors, on peut déterminer la valeur $\mathbf{G_2}$ en résolvant cette équation de 2$^{\text{ème}}$ degré.

Ensuite, on déduit la valeur de $\mathbf{D_1}$.

3.5. Recherche de la longueur de deux cotés différents

On suppose que la longueur inconnue d'un coté = $\boldsymbol{D_1}$, et son gisement connu =$\boldsymbol{G_1}$.

Ainsi que la longueur inconnue de l'autre coté = $\boldsymbol{D_2}$. et son gisement connu = $\boldsymbol{G_2}$,

$$\begin{cases} D_1 \sin G_1 + D_2 \sin G_2 = x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ D_1 \cos G_1 + D_2 \cos G_2 = y \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2) \end{cases}$$

On multiplie la première équation par (cos G_1) et la deuxième par (sin G_1):

$$\begin{cases} D_1 \sin G_1 . \cos G_1 + D_2 \sin G_2 . \cos G_1 = x . \cos G_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3) \\ D_1 \cos G_1 . \sin G_1 + D_2 \cos G_2 . \sin G_1 = y . \sin G_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4) \end{cases}$$

(4) – (3) nous donne:

$$D_2 \cos G_2 . \sin G_1 - D_2 \sin G_2 . \cos G_1 = y . \sin G_1 - x . \cos G_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

On peut écrire l'équation (5) comme suit:

$$P_1' D_2 - P_2' D_2 = Q \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

avec: $P_1' = \cos G_2 . \sin G_1$, $P'_2 = \sin G_2 \cos G_1$, $Q = y \sin G_1 - x \cos G_1$

On détermine finalement la longueur inconnue ***D₂***:

$$D_2 = \frac{Q}{(P_2' - P_1')}$$

Puis, on déduit la valeur de ***D₁***, à partir de l'équation (1) ou (2).

3.6. Recherche des gisements de deux cotés différents

On suppose que la longueur connue d'un coté = $\boldsymbol{D_1}$, et son gisement inconnu =$\boldsymbol{G_1}$.

Ainsi que la longueur connue de l'autre coté = $\boldsymbol{D_2}$. et son gisement inconnu = $\boldsymbol{G_2}$,

$$\begin{cases} D_1 \sin G_1 + D_2 \sin G_2 = x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ D_1 \cos G_1 + D_2 \cos G_2 = y \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2) \end{cases}$$

On peut écrire les équations (1) et (2) comme suit:

$$\begin{cases} D_1 \sin G_1 = x - D_2 \sin G_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3) \\ D_1 \cos G_1 = y - D_2 \cos G_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4) \end{cases}$$

En élevant au carré et en faisant la somme des deux équations:

$$D_1^2 = x^2 + y^2 + D_2^2 - 2D_2 (x \sin G_2 + y \cos G_2) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

d'où:

$$(x \sin G_2 + y \cos G_2) = \frac{x^2 + y^2 + D_2^2 - D_1^2}{2D_2} = Q$$

ou bien:

$$\sin G_2 = \frac{(Q - y \cos G_2)}{x} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

on peut déterminer la valeur de G_2 à partir de l'équation (6):

- **soit graphiquement:** en traçant une courbe pour chaque terme de l'équation en fonction de G_2. L'intersection des deux courbes donne le point qui vérifie cette équation.
- **Soit mathématiquement:** en élevant les deux termes de l'équation (6) au carré:

$$\sin^2 G_2 = \frac{Q^2}{x^2} + \frac{y^2 \cos^2 G_2}{x^2} - \frac{2Q.y \cos G_2}{x}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 G_2 + \cos^2 G_2 = \frac{Q^2}{x^2} + \left(\frac{y^2}{x^2} + 1\right)\cos^2 G_2 - \frac{2Q.y \cos G_2}{x}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{y^2}{x^2} + 1\right)\cos^2 G_2 - \left(\frac{2Q.y}{x}\right)\cos G_2 + \frac{Q^2}{x^2} - 1 = 0$$

on pose: $A = \frac{y^2}{x^2} + 1$; $B = -\frac{2Qy}{x}$; $C = \frac{Q^2}{x^2} - 1$

On obtient alors une équation du 2ème degré:

$$A\cos^2 G_2 + B\cos G_2 + C = 0$$

4. Calcul de la surface d'un polygone fermé

Connaissant les coordonnées des sommets d'un polygone fermé, on peut déterminer ainsi la surface de ce polygone de la façon suivante:

Soit le polygone fermé ABCDE dont les abscisses des sommets sont X_A, X_B, X_C, X_D, X_E et les ordonnées des sommets sont Y_A, Y_B, Y_C, Y_D, Y_E.

A partir de la figure ci-dessous, la surface du polygone est égale à la somme des surfaces des trapèzes:

AA'BB' + BB'CC' +CC'DD' – DD'EE' – EE'AA'

$S = (Y_A + Y_B)(X_B – X_A)/2 + (Y_B + Y_C)(X_C - X_B)/2 + (Y_C + Y_D)(X_D - X_C)/2$

$– (Y_D + Y_E)(X_E - X_D)/2 – (Y_E + Y_A)(X_E - X_A)/2$

$S = [(Y_A + Y_B)(X_B – X_A) + (Y_B + Y_C)(X_C - X_B) + (Y_C + Y_D)(X_D - X_C) – (Y_D + Y_E)(X_E - X_D)$

$– (Y_E + Y_A)(X_E - X_A)] /2$

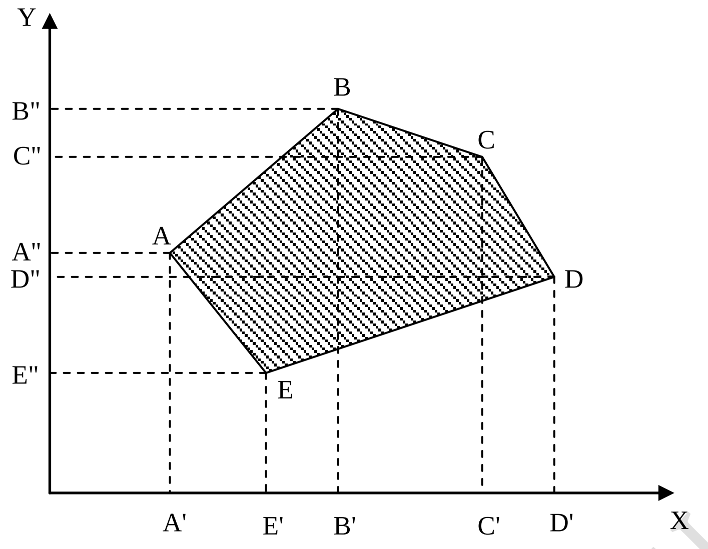

Figure 4 – Calcul de la surface d'un polygone fermé.

Ou bien selon l'autre sens:

BB"CC" + CC"DD" + DD"EE" – EE"AA" – AA"BB"

$S = (X_B + X_C)(Y_B - Y_C)/2 + (X_C + X_D)(Y_C - Y_D)/2 + (X_D + X_E)(Y_D - Y_E)/2$

$- (X_E + X_A)(Y_A - Y_E)/2 - (X_A + X_B)(Y_B - Y_A)/2$

$S = [(X_B + X_C)(Y_B - Y_C) + (X_C + X_D)(Y_C - Y_D) + (X_D + X_E)(Y_D - Y_E)$

$- (X_E + X_A)(Y_A - Y_E)/ - (X_A + X_B)(Y_B - Y_A)] /2$

5. Utilisation du gisement pour les calculs de coordonnées

En topographie, il est très fréquent de connaître un point S (E_S, N_S) et de chercher les coordonnées d'un point P visible depuis S. On dit que P est rayonné depuis S si l'on peut mesurer la distance horizontale D_{SP} et le gisement G_{SP} (Figure 4). Quel que soit le quadrant, on peut alors calculer les coordonnées du point P par les formulas suivantes :

$$E_p = E_S + D_{SP}.\sin G_{SP}$$
$$N_p = N_S + D_{SP}.\cos G_{SP}$$

A défaut de mesurer directement G_{SP}, on mesure un angle a avec une direction dont le gisement est connu ou bien on calcule un G_0 *moyen* de station.

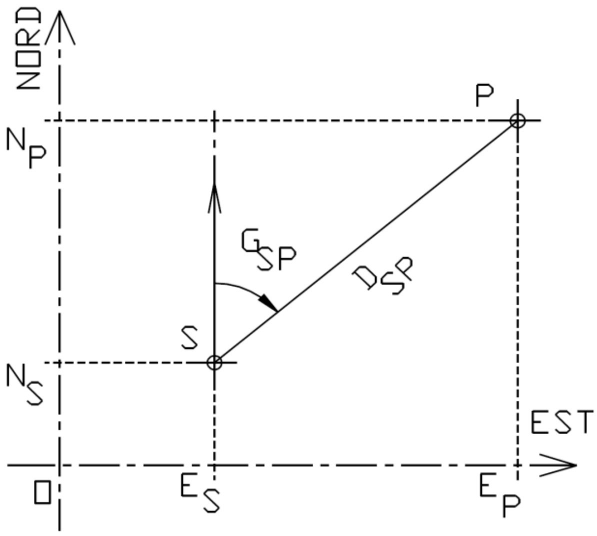

Figure 4 – Calcul de coordonnées.