Chapitre I: Rappel sur le calcul matriciel.

1. Définitions

- **Matrice** : une matrice est un tableau de chiffres rangés en lignes et en colonnes.

Exemple : $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$

- **Ordre d'une matrice** : Une matrice d'ordre **m** et **n** possède : **m** lignes et **n** colonnes. Dans l'exemple précédent on dira que la matrice est d'ordre (2,3).
- **Matrice colonne** : Elle ne possède qu'une seule colonne et n lignes : matrice (n,1).

Exemple : $\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}$

- **Matrice ligne** : Elle ne possède qu'une seule ligne et **m** colonnes : matrice (1,m).

Exemple : $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix}$

- **Matrice unité** : C'est une matrice dont tous les éléments sont (1) ; elle est désignée par **[I]**.

2. Matrice carrée

C'est une matrice qui a autant de lignes que de colonnes.

Exemple : $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

- La **diagonale principale** d'une matrice est formée par l'ensemble des éléments a_{ii} de la matrice. Une **matrice diagonale** est donc une matrice qui a tous ses éléments nuls sauf ceux de sa diagonale principale.
- La **matrice unité** est la matrice diagonale qui n'a que des **1** dans sa diagonale principale.
- La **trace d'une matrice** est la somme des éléments de la diagonale principale.

3. Opérations sur les matrices

- **Transposition** : Les lignes de la matrice **[A]** de départ deviennent les colonnes de la matrice transposée **[A]**^{T}. On dit qu'on a transposé la matrice.

Exemple : si $[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$; alors : $[A]^T=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix}$

- **Addition** : On ne peut additionner que des matrices de même ordre. On additionne les éléments équivalents (dans la même position dans les deux matrices) de chaque matrice.

Exemple :

$$[A]+[B]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{bmatrix}$$

- **Multiplication d'une matrice par un scalaire**: Tous les éléments de la matrice sont multipliés par ce scalaire.

Exemple : $\lambda\times[A]=\begin{bmatrix} \lambda\times a_{11} & \lambda\times a_{12} & \lambda\times a_{13} \\ \lambda\times a_{21} & \lambda\times a_{22} & \lambda\times a_{23} \end{bmatrix}$

- **Multiplication de 2 matrices ([A]x[B]=[C])** : La multiplication n'est possible que si le nombre de colonnes de **[A]** est égal au nombre de lignes de **[B]**. Si **[A]**$_{(m,p)}$ multiplie **[B]**$_{(p,n)}$ alors **[C]** est une matrice d'ordre **(m,n)**. La multiplication est effectuée en multipliant terme à terme une ligne de **[A]** avec une colonne de **[B]** et en additionnant chacun des produits.

Exemple : $[A]\times[B]=[C]$ donne : $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$; où :

$$c_{11}=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{12}+a_{13}b_{13}$$
$$c_{12}=a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32}$$
$$c_{21}=a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31}$$
$$c_{22}=a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32}$$

- **Inversion** : Uniquement pour les matrices carrées. Comme pour l'inverse d'un nombre, on appellera **[B]** la matrice inverse de **[A]** si **[A]x[B]=[I]** la matrice unité (rappel : l'inverse d'un nombre **r** est le nombre **p** tel que **r.p= 1** soit **p = r**$^{-1}$). La matrice **[A]**$^{-1}$ existe si le déterminant de **[A]** n'est pas nul.

4. Méthode de calcule de l’inverse d’une matrice

- On calcule le déterminant de la matrice **[A] = det(A) ;**
- On transpose la matrice **[A]**. Elle devient $[A]^T$;
- Pour chaque élément de la matrice $[A]^T$, on calcule le mineur associé. Le mineur est le déterminant de la matrice obtenue en supprimant la ligne et la colonne auxquelles appartient l’élément.
- On associe à chacun de ces mineurs, 1 signe donné par $(-1)^{i+j}$ **;** **i** étant le numéro de la ligne et **j** le numéro de la colonne de l’élément envisagé. L’ensemble (signe) x (mineur) constitue les cofacteurs de la matrice $[A]^T$.
- Il suffit maintenant de remplacer tous les éléments de la matrice $[A]^T$ par les cofacteurs (on obtient alors une matrice $[A]^C$) et de diviser par **det(A)** pour obtenir l’inverse de la matrice **[A]**.

$$[A]^{-1} = \frac{[A]^C}{\det(A)}$$

Exemple : Calcul du déterminant et inversion de matrices carrées :

$$[A]=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix};\quad [B]=\begin{bmatrix}3 & 1 & 1\\ 0 & -2 & 1\\ -1 & -1 & 2\end{bmatrix};\quad [C]=\begin{bmatrix}1 & 3 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & -3\end{bmatrix};\quad [D]=\begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & -2 & 0\\ 1 & -1 & -1\end{bmatrix}$$