Chapitre II : Equations de base du théorème de l'élasticité.

1. Introduction

Dans ce chapitre on développe les équations de base de la théorie d'élasticité. La solution de ces équations doit évidemment satisfaire les conditions aux frontières ainsi que les conditions de chargement.

Cette théorie comprend trois étapes :

- Les équations d'équilibre ou de mouvement ;

- Les relations : Déformations unitaires – déplacements ;

- Les lois constitutives du matériau.

Il est évident qu'une solution qui satisfait les équations d'équilibre, de compatibilité et les conditions aux frontières, est une solution unique.

On pourrait se demander alors, si on a une solution exacte pourquoi résoudre le problème en élément finis?

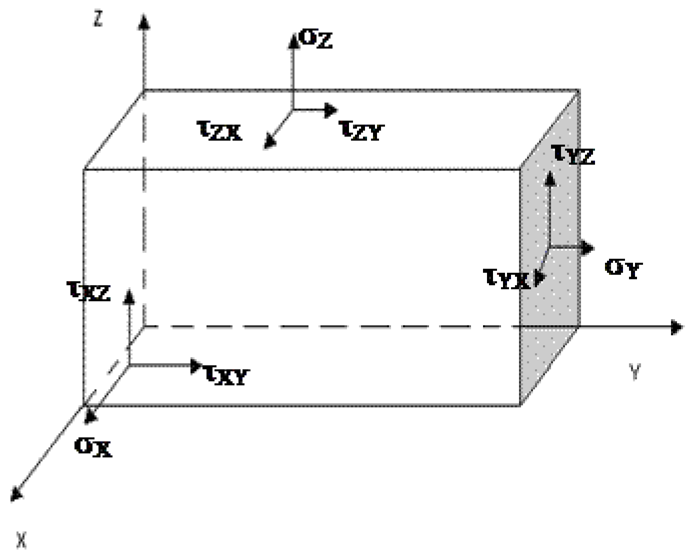
Effectivement, les solutions exactes sont peu nombreuses et on les utilise directement lorsque le cas se présente.

Autrement, très souvent, on s'en sert pour vérifier soit la précision soit la convergence de la méthode des éléments finis. Il est donc très important de connaître la formulation exacte de certains problèmes, afin de faire les comparaisons.

2. Les équations d'équilibre

Les contraintes en un point sont définies par la matrice

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \tau_{zz} \end{pmatrix} \qquad \text{où :} \qquad \tau_{ij} = \tau_{ji}$$



Représentation des contraintes dans l'espace.

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + Z = 0$$

En trois dimensions, nous avons 15 équations :

- trois déplacements (u, v, w) ;

- six contraintes ;

- six déformations.

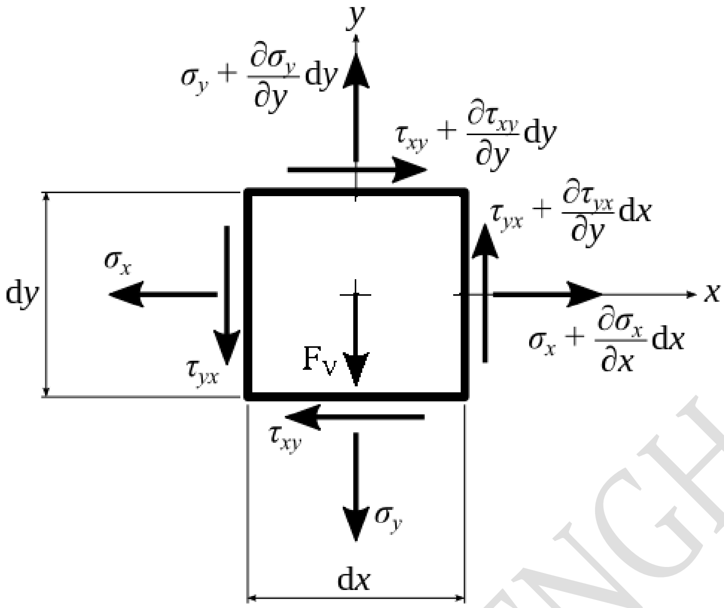
En 2 dimensions, nous avons 8 équations :

- deux déplacements (u, v) ;

- trois contraintes ;

- trois déformations.

Pour des raisons de simplification, on fera la démonstration des équations d'équilibre en deux dimensions. L'extrapolation tridimensionnelle sera alors évidente.



D'où :

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right) dy - \sigma_x dy + F_x dx dy + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy\right) dx - \tau_{yx} dx = 0$$

On en résulte :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + F_x = 0$$

$$\frac{\partial \sigma y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + F_y = 0$$

F_x, F_y : les forces unitaires de surface.

En trois dimensions les équations d'équilibre sont :

X, Y, Z : les forces de volume.

2.3- Relations : Déformations – déplacements.

Pour une théorie linéaire, où les déformations sont faibles on a :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x},\ \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y},\ \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x},\ \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y},\ \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

En forme matricielle on a :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y \\ \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

Pour le cas bidimensionnel, on a 3 relations au lieu de 6. Si on veut inclure les termes du second ordre, on a :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \dots$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \dots$$

4. Relations : Contrainte – déformations.

Si le matériau est considéré isotrope, la matrice **E** réduite à l'évaluation de deux constantes seulement :

E : module d'élasticité ;

ν: coefficient de poisson.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & . & . & . \\ \nu & 1-\nu & \nu & . & . & . \\ \nu & \nu & 1-\nu & . & . & . \\ . & . & . & (1-2\nu)/2 & . & . \\ . & . & . & . & (1-2\nu)/2 & . \\ . & . & . & . & . & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix}$$

$$\{\sigma\} \quad = \quad [E] \quad \{\varepsilon\}$$

4.1. Contraintes planaires

Dans le cas où on a une membrure, une plaque mince chargée dans son plan, un mur, etc. Les conditions suivantes peuvent simplifier le problème :

$$\sigma_{zz} = \tau_{zx} = \tau_{yz} = 0$$

Pour les contraintes planaires, il est facile de montrer que :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & . \\ \nu & 1 & . \\ . & . & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

4.2. Déformations planaires

Les déformations planaires sont basées sur le fait qu'on a une structure allongée de section constante, avec un chargement uniforme.

Dans ces conditions :

$$\varepsilon_{zx} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

Les exemples d'applications pourraient être soit un mur de soutènement, un tunnel, un barrage en terre.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{zy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & . \\ \nu & 1-\nu & . \\ . & . & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

Et aussi :

$$\sigma_{zx} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$$

2.5- Fonction de tension

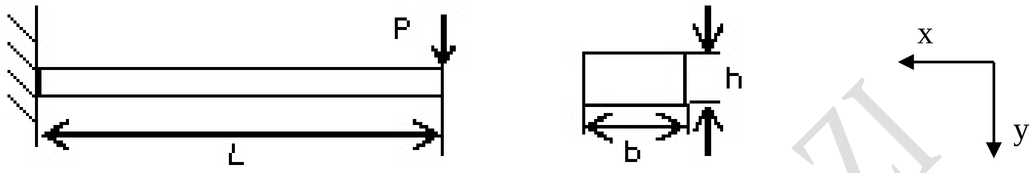
La solution d'un problème à deux dimensions se réduit à l'intégration des équations différentielles d'équilibre, des équations de compatibilité et de l'équation aux limites.

La méthode habituelle employée pour résoudre ces équations, consiste à introduire une nouvelle fonction de tension (ou d'Airy) :

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \qquad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \qquad \tau_{xy} = \sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$$

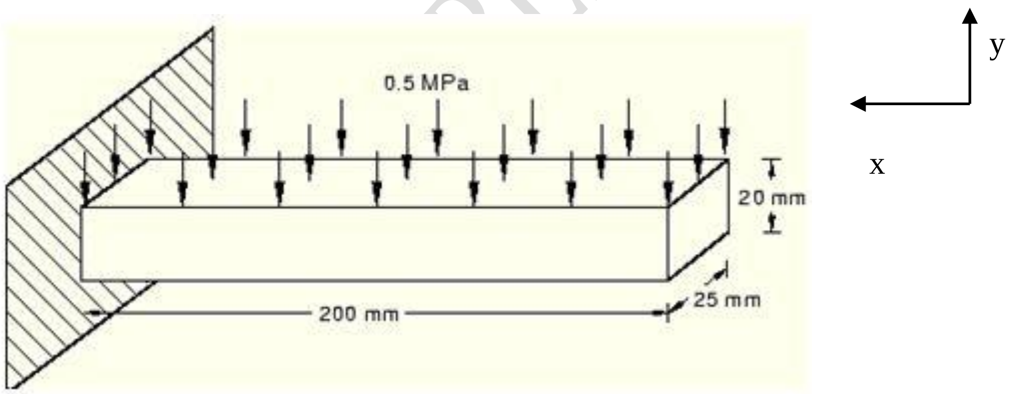
Exemples :

1)



$$\varphi = \frac{2P}{bh^3}(xy^3 - \frac{3}{4}h^2xy)$$

2)



$$\varphi = \frac{Q}{h^3}\left(x^2y^3 - \frac{y^5}{5} - \frac{3}{4}h^2x^2y - \frac{h^3x^2}{4} + \frac{h^2y^3}{10} \right)$$

* Cette fonction a été introduite dans la résolution des problèmes à deux dimensions en 1862 par G.B. Airy.