

Chapitre III: Principe de l'énergie potentielle.

1. Introduction

Dans ce chapitre on va introduire la notion du potentiel total. Ce potentiel est fonction des déplacements et lorsque cette fonction est minimisée par rapport aux déplacements, on obtient des équations d'équilibre. Ce principe sert à dériver les équations d'équilibre.

Pourquoi choisir cette méthode ? C'est précisément parce que cette approche est plus générale et plus fiable.

En générale, on obtient des polynômes pour définir le champ des déplacements. En effet, le choix des polynômes est multiple si ces polynômes satisfassent les conditions aux frontières. La méthode de l'énergie potentielle minimale devient la méthode de Rayleigh - Ritz.

Cette méthode satisfait les conditions d'équilibre de la structure d'une façon approximative.

2. Principe de l'énergie potentielle minimale

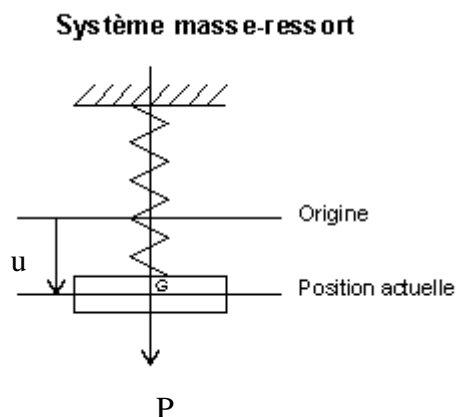
Parmi toutes les configurations possibles pour déplacer un système tout en satisfaisant les conditions cinétiques et les conditions aux frontières, les champs des déplacements qui ont pu vont satisfaire les équations d'équilibre, rendront alors l'énergie potentielle totale stationnaire. Si cette valeur stationnaire est un minimum, l'équilibre est stable.

Notons que ce principe est valable non seulement pour les systèmes linéaires, mais aussi pour les systèmes non-linéaires à condition qu'ils soient « conservateurs » ; de plus on doit toujours respecter les conditions aux frontières et la continuité.

Considérons à titre d'exemple le système à 1 ddl :

Si $u = 0$ lorsque le ressort est déchargé, on peut écrire que l'énergie potentielle est :

$$\pi_p = \frac{1}{2}ku^2 - Pu$$

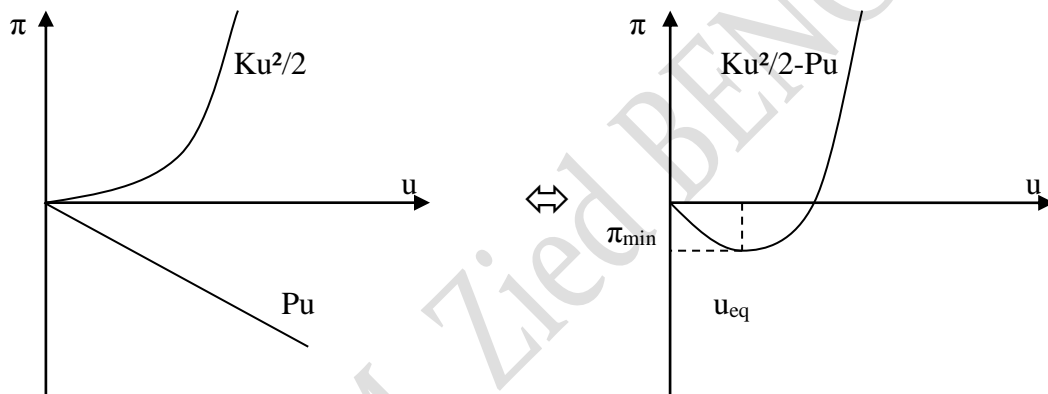


Un déplacement vertical δu qui rendrait π_p par rapport à u , on peut dire que l'équilibre sera atteint lorsque l'énergie de déformation interne sera égale au travail effectué.

Soit :

$$\frac{1}{2}ku^2 = Pu$$

$$u_{eq} = P/k$$



3. Système à N degré de liberté

Pour un système à plusieurs degrés de liberté, l'énergie potentielle totale

$$\pi = \pi(u_1, u_2, \dots, u_n)$$

Où n est le nombre de degrés de liberté.

Après différentiation, on a :

$$\delta\pi = \frac{\partial\pi}{\partial u_1} \delta u_1 + \frac{\partial\pi}{\partial u_2} \delta u_2 + \dots + \frac{\partial\pi}{\partial u_n} \delta u_n$$

D'après la condition de stationnarité : $\delta\pi = 0$, il faut que :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial \pi}{\partial u_1} = 0 \\ \frac{\partial \pi}{\partial u_2} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial \pi}{\partial u_n} = 0 \end{array} \right\} \quad n \text{ équations}$$

Ces équations représentent les équations d'équilibre.

4. Formulation de l'énergie potentielle

Considérons un corps élastique :

$$\{\varepsilon\} = [E][\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}]$$

Si l'énergie élastique W est augmentée de δW dû à un déplacement infinitésimal, on a :

$$\delta W = \{\sigma\}^T \{\delta\varepsilon\}$$

$$\delta W = \sigma_x \delta\varepsilon_x + \sigma_y \delta\varepsilon_y + \sigma_z \delta\varepsilon_z + \dots + \tau_{xz} \delta\gamma_{xz}$$

$$= \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_x} \delta\varepsilon_x + \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_y} \delta\varepsilon_y + \dots + \frac{\partial W}{\partial \gamma_{xz}} \delta\gamma_{xz}$$

On conclut que :

$$\sigma_x = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_x}, \quad \sigma_y = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_y}, \quad \dots$$

Les relations précédentes peuvent s'écrire en forme matricielle

$$\left\{ \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} \right\} = \{\sigma\} = [E]\{\varepsilon\} + \{\sigma_0\}$$

L'intégration de cette équation par rapport aux déformations donne :

$$W = \frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T [E] \{\varepsilon\} + \{\varepsilon\}^T \{\sigma_0\}$$

Si, on définit le champ de déplacement en question par $\{u\}$ et les forces de surfaces par $\{P_s\}$ et les forces volumiques par $\{P_v\}$, on aura une expression pour l'énergie potentielle totale qui est :

$$\pi = \int_v \left(\frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T [E] \{\varepsilon\} + \{\varepsilon\}^T \{\sigma_0\} \right) dv - \int_v \{u\}^T \{P_v\} dv - \int_s \{u\}^T \{P_s\} ds$$

